

# Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2008-03-11

## 1) Lösning

Frobeniusansatsen  $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  insatt i differentialekvationen ger

$$\begin{aligned} 9x^2 y'' + 9x^2 y' + 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \\ &+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)a_n x^{n+r+1}}_{n+1 \rightarrow n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Omindiceringen ger oss

$$\sum_{n=0}^{\infty} [9(n+r)(n+r-1) + 2]a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} 9(n+r-1)a_{n-1} x^{n+r} = 0 \quad (2)$$

Här ser vi att indexekvationen ( $n=0$ ) blir

$$9r(r-1) + 2 = (3r-1)(3r-2) = 0 \implies r_1 = \frac{2}{3} \text{ och } r_2 = \frac{1}{3} \quad (3)$$

För  $r_1 = \frac{2}{3}$  får vi rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{3n-1}{n(3n+1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4)$$

varur följer

$$a_1 = -\frac{1}{2} a_0, \quad a_2 = \frac{5}{28} a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{21} a_0, \quad (5)$$

och för  $r_2 = \frac{1}{3}$  får vi rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{3n-2}{n(3n-1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (6)$$

som ger

$$a_1 = -\frac{1}{2} a_0, \quad a_2 = \frac{1}{5} a_0, \quad a_3 = -\frac{7}{120} a_0, \quad (7)$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$y = Ax^{2/3} \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \dots \right) + Bx^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \dots \right)$$

---

## 2) Lösning

---

$u(x, t) = e^{-ht}v(x, t)$  ger randvärdesproblemet för  $v(x, t)$

$$\text{PDE: } v_t(x, t) = kv_{xx}(x, t) \quad (8)$$

$$\text{RV1: } v(0, t) = \text{RV2: } v(2, t) = 0 \quad (9)$$

$$\text{BV1: } v(x, 0) = \left(1 + 4 \cos \frac{3\pi x}{2}\right) \sin \frac{3\pi x}{2} \quad (10)$$

Variabelseparation  $v(x, t) = X(x)T(t)$  ger

$$\frac{1}{k} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad (11)$$

För  $X$  fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville -) problemet

$$X'' - \lambda X = 0, \quad 0 < x < 2 \quad (12)$$

$$X(0) = X(2) = 0 \quad (13)$$

Den allmänna lösningen till ekv(12) är

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 + C_2 x & \text{om } \lambda = 0 \\ C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Det första randvillkoret  $X(0) = 0$  ger  $C_1 = 0$  och  $C_2$  kan väljas godtyckligt. Det andra randvillkoret ger vid handen

$$X(2) = 0 = \begin{cases} C_2 \sin \alpha 2 & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_2 2 & \text{om } \lambda = 0 \\ C_2 \sinh \alpha 2, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (15)$$

som endast ger en icke trivial lösning  $X \neq 0$  för negativa  $\lambda = -\alpha^2$ , m a o måste  $\sin 2\alpha = 0$  eller  $2\alpha = n\pi$ . Den motsvarande egenfunktionen blir då  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2}$

För  $T$  har vi ekvationen, se ekv(11),

$$\frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\alpha^2 \quad (16)$$

med lösningen

$$T_n(t) = e^{-kn^2\pi^2 t/4} \quad (17)$$

Härmed får vi den allmänna lösningen

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/4} \sin \frac{n\pi x}{2} \quad (18)$$

och  $t = 0$  ger

$$v(x, 0) = \left(1 + 4 \cos \frac{3\pi x}{2}\right) \sin \frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} \quad (19)$$

där mellanledet i sambanden (19) kan omformas och resulterar i

$$\sin \frac{3\pi x}{2} + 2 \sin \frac{6\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} \quad (20)$$

Identifiering ger  $c_3 = 1, c_6 = 2$  och  $c_n = 0$  för  $n \neq 3$  resp  $6$  och svaret blir slutligen

$$u(x, t) = \sin \frac{3\pi x}{2} e^{-(9k\pi^2/4+h)t} + 2 \sin \frac{6\pi x}{2} e^{-(9k\pi^2+h)t}$$

### 3) Lösning

Variabelseparation  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  ger

$$u = XY \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad (21)$$

och sambanden

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0 \quad (22)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad Y'(0) = Y'(1) = 0 \quad (23)$$

ger den allmänna lösningen i tabellform

$$Y(y) = \begin{cases} C_1 \cos \alpha y + C_2 \sin \alpha y & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 y + C_2 & \text{om } \lambda = 0 \\ C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (24)$$

samt tabellen för derivatan

$$Y'(y) = \begin{cases} \alpha(-C_1 \sin \alpha y + C_2 \cos \alpha y) & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 e^{\alpha y} - C_2 e^{-\alpha y}), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (25)$$

Med insatta randvärden fås

$$Y'(0) = 0 = \begin{cases} \alpha C_2 & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 - C_2), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$Y'(1) = 0 = \begin{cases} \alpha(-C_1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha) & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 e^\alpha - C_2 e^{-\alpha}), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \quad (27)$$

Ur tabellen ser vi att för  $\lambda > 0$  blir  $C_1 = C_2 = 0$ , däremot gäller för  $\lambda = 0$  att  $C_1 = 0$  och  $Y(y) = C_2$  godtyckligt, vilket innebär att  $\lambda = 0$  ger egenvärdet 0 med motsvarande egenfunktion  $Y_0(y) = C_2 \neq 0$  och för  $\lambda < 0$ ,  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$  krävs  $\sin \alpha = 0, \implies \alpha = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$

Den motsvarande egenfunktion blir då

$$\underline{Y_n(y) = \cos n\pi y}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Från ekv(22) får vi nu

$$X'' - n^2\pi^2 X = 0, \quad X(0) = 0 \tag{28}$$

som resulterar i

$$X(x) = C_1 e^{n\pi x} + C_2 e^{-n\pi x}, \quad C_2 = -C_1$$

och vi får egenfunktionen

$$\underline{X_n(x) = \sinh n\pi x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Observera att vi fick ovan ett egenvärde  $\lambda = 0$ , m a o  $n = 0$ , som innebär att vi har en lösning till ekv(28) på formen

$$X(x) = ax$$

och tillhörande egenfunktion

$$\underline{X_0(x) = x}$$

Sammanfattningsvis får vi ett delsvar, med  $c_0 = aC_2$ ,

$$u(x, y) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi x \cos n\pi y \tag{29}$$

där  $c_n$  bestäms genom anpassning till randvillkoret RV2 i texten

$$u(1, y) = 1 - \cos 2\pi y = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi \cos n\pi y \tag{30}$$

Identifiering ger snabbt

$$c_0 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{\sinh 2\pi}, \quad c_n = 0 \text{ för } n \neq 0 \text{ och } 2$$

Svar:

$$u(x, y) = x - \frac{\sinh 2\pi x}{\sinh 2\pi} \cos 2\pi y$$

## 4) Lösning

---

$\mathcal{L}$ - transformen m a p t ger

$$U_{xx}(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0) \quad (31)$$

$$U_{xx}(x, s) - sU(x, s) = -u_0 - u_0 \sin \frac{x\pi}{L} \quad (32)$$

Om vi betraktar

$$U(x, s) = U_{\text{hom}}(x, s) + U_{\text{part},1}(x, s) + U_{\text{part},2}(x, s) \quad (33)$$

får vi snabbt

$$U_{\text{hom}}(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}, \quad U_{\text{part},1}(x, s) = \frac{u_0}{s} \quad (34)$$

samt för den andra partikulärlösningen ansätter vi

$$U_{\text{part},2}(x, s) = a \cos \frac{x\pi}{L} + b \sin \frac{x\pi}{L} \quad (35)$$

och får efter enkla räkningar

$$U_{\text{part},2}(x, s) = \frac{u_0}{s + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \sin \frac{x\pi}{L} \quad (36)$$

Härmed blir dellösningen i  $\mathcal{L}$ -planet

$$U(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s} + \frac{u_0}{s + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \sin \frac{x\pi}{L} \quad (37)$$

Återstår att anpassa de givna transformerade randvillkoren

$$U(0, s) = \frac{u_0}{s}, \quad U(L, s) = \frac{u_0}{s} \quad (38)$$

som ger direkt  $A = B = 0$ .

Svaret i  $t$ -planet får vi nu genom inverstransformen

$$u(x, t) = u_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + u_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + (\pi/L)^2} \right\} \sin \frac{x\pi}{L} \quad (39)$$

och får slutligen den sökta temperaturen

$$\boxed{u(x, t) = u_0 + u_0 e^{-\pi^2 t/L^2} \sin \frac{x\pi}{L}}$$

---

## 5) Lösning

---

Vi skall alltså lösa problemet

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + u_{zz} = 0 \quad (40)$$

med randvillkoren

$$u(\rho, 0) = 0, \quad 0 < \rho < 1 \quad (41)$$

$$u(\rho, 2) = f(\rho), \quad 0 < \rho < 1 \quad (42)$$

$$u(1, z) = 0, \quad 0 < z < 2 \quad (43)$$

$$u(0, z) \dots \text{begränsad} \quad (44)$$

där  $f(\rho) = 100J_0(\rho)$

Vi börjar som vanligt med variabelseparation  $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$  och får på sedvanligt sätt

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \text{separationskonsten } k \quad (45)$$

och randvillkoren

$$R(1) = 0, R(0) \dots \text{begränsad och } Z(0) = 0 \quad (46)$$

$R$ -ekvationen blir

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k\rho^2 R(\rho) = 0 \quad (47)$$

Den allmänna lösningen till ekv(47) är

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_0(\lambda\rho) + C_2 Y_0(\lambda\rho) & \text{om } k = -\lambda^2 < 0; \lambda > 0 \\ C_1 \ln \rho & \text{om } k = 0 \\ C_1 I_0(\lambda\rho) + C_2 K_0(\lambda\rho) & \text{om } k = \lambda^2 > 0; \lambda > 0 \end{cases} \quad (48)$$

En titt i BETA 12.4 på graferna över Besselfunktionerna ger vid handen att  $Y_0(x), I_0(x), K_0(x)$  inte satisfierar randvillkoren (46) utom  $J_0(x)$ . Detta innebär att alla konstanter i tabellen (48) måste sättas till noll utom  $C_1$  framför  $J_0(\lambda\rho)$  som ger oss delsvaret  $R(\rho) = C_1 J_0(\lambda\rho)$ .

$\lambda$  bestämmer vi nu m ha randvillkoret  $R(1) = 0$ . Detta betyder att  $(\lambda_n 1) = \alpha_{0,n}$ , där  $\alpha_{0,n}$  är det  $n$ -te positiva nollstället till Besselfunktionen  $J_0(x)$ .

Dette ger oss egenfunktionen

$$\underline{R_n(\rho) = C_n J_0(\alpha_{0,n}\rho)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Återstår att lösa  $Z(z)$  m ha ekv(45) och vetskapen att  $k = -\lambda = -\alpha_{0,n}^2$  och vi får differentialekvationen för  $Z$

$$Z_n''(z) - \alpha_{0,n}^2 Z_n(z) = 0 \quad (50)$$

som har lösningen

$$Z_n(z) = A_n \cosh(\alpha_{0,n}z) + B_n \sinh(\alpha_{0,n}z) \quad (51)$$

Villkoret  $Z_n(0) = 0$  kräver att  $A_n = 0$ . Med hjälp av superpositionsprincipen ser vi därför att allmänna lösningen till de homogena villkoren ges av

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho) \sinh(\alpha_{0,n}z) \quad (52)$$

Det återstår nu endast att bestämma koefficienterna  $a_n$  så att även det kvarvarande icke-homogena randvillkoret (42) blir uppfyllt, d v s

$$u(\rho, 2) = 100J_0(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho) \sinh(\alpha_{0,n}2) \quad (53)$$

Multiplikation av mellanledet och högerledet i ekv(53) med  $J_0(\alpha_{0,n}\rho)$  och efterföljande integration mellan  $\rho = 0$  och 1 ger

$$100 \int_0^1 J_0(\rho) J_0(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho = a_n \sinh(\alpha_{0,n}2) \int_0^1 J_0^2(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho \quad (54)$$

Den högra integralen blir m h a BETA 12.4

$$\int_0^1 J_0^2(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho = \|J_0(\alpha_{0,n}\rho)\|_{\rho}^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_{0,n}) \quad (55)$$

Även den vänstra integralen hittar vi i BETA 12.4, nämligen i tabellen med rekursionsformler. Med  $C_n = J_0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \alpha_{0,n}$ ,  $x = \rho$  och  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , allt ur samma tabell, får vi sambandet

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_0(\rho) J_0(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho &= \\ &= \frac{1}{\alpha_{0,n}^2 - 1} \left[ \rho \left\{ J_0(\alpha_{0,n}\rho) J_0'(\rho) - \alpha_{0,n} J_0(\rho) J_0'(\alpha_{0,n}\rho) \right\} \right]_{\rho=0}^1 \\ &= \frac{1}{\alpha_{0,n}^2 - 1} \left[ \underbrace{1 J_0(\alpha_{0,n}1)}_{=0} J_0'(1) - \alpha_{0,n} J_0(1) J_0'(\alpha_{0,n}1) \right] \\ &= -\frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_0'(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1} = \frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1} \end{aligned} \quad (56)$$

där vi i sista ledet använde  $J_0'(x) = -J_1(x)$  med  $x = \alpha_{0,n}$  och vi får slutligen

$$100 \frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1} = a_n \sinh(\alpha_{0,n}2) \frac{J_1^2(\alpha_{0,n})}{2} \quad (57)$$

Ur detta erhåller vi

$$a_n = 200 \frac{\alpha_{0,n} J_0(1)}{(\alpha_{0,n}^2 - 1) \sinh(\alpha_{0,n} 2) J_1(\alpha_{0,n})} \quad (58)$$

och till sist får vi svaret

$$u(\rho, z) = 200 J_0(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{0,n} J_0(\alpha_{0,n} \rho) \sinh(\alpha_{0,n} z)}{(\alpha_{0,n}^2 - 1) \sinh(\alpha_{0,n} 2) J_1(\alpha_{0,n})}$$

---